أكاديمية الجهة الشرقية

الدرس الثامن:

دراسة الدوال وتمثيلها

الأستاذ: نجيب عثماني

مستوى:السنة الأولى من سلك الباكالوريا

- شعبة التعليم الأصيل:مسلك العلوم الشرعية و مسلك اللغة العربية
- شعبة الآداب و العلوم الإنسانية: مسلك الآداب و مسلك العلوم الإنسانية

محتوى الدرس و الأهداف القدرات المنتظرة من الدرس و التعليمات الرسمية

محتوى البرنامج	القدرات المنتظرة	توجيهات تربوية
ـ المقارب الأفقي؛ المقارب العمودي؛ ـ أمثلة لدراسة وتمثيل الدوال: $x \to ax^2+bx+c$ و $x \to \frac{ax+b}{cx+d}$ و $x \to ax^3+bx^2+cx+d$	ـ استعمال عناصر تماثل منحنى في اختصار مجموعة دراسة دالة؛ ـ تمثيل دوال حدودية من الدرجة الثانية ومن الدرجة الثالثة ودوال متخاطة؛ ـ استعمال التمثيل المبياني لدالة أو جدول تغيراتها لدراسة حلول بعض المعادلات والمتراجحات .	ـ يتم قبول الفروع اللانهائية لمنحنى دالة حدودية من الدرجة الثالثة؛ ـ ينبغي تناول الحل المبياني لمعادلات ومتراجحات من النوع $f(x)=c$ و $f(x)\le c$ حيث f دالة من بين الدوال الواردة في البرنامج إذا لم يكن الحل الجبري في المتناول.

I. المستقيمات المقاربة

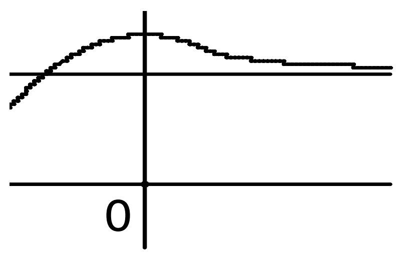
في جميع فقرات الدرس , ننسب المستوى إلى معلم متعامد $(o;\vec{i};\vec{j})$

1. المقارب الموازي لمحور الأراتيب

تعريف

إذا كانت: $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\succ a}} f(x)=-\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\prec a}} f(x)=-\infty$

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $x=a$ مقارب للمنحنى (C_f)



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي :

$$f(x)=\frac{2x-1}{3x-6}$$

حدد $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

الجواب: $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{2x-1}{3x-6}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$3x-6$	$-$	0	$+$

$\lim\limits_{x\to 2^+} 2x-1=3$ و $\lim\limits_{x\to 2^+} 3x-6=0^+$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} 3x-6=0^-$

ومنه : $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=-\infty$

التأويل المبياني : المستقيم ذا المعادلة $x=2$ مقارب للمنحنى (C_f)

تمرين1 : أحسب النهايات التالية و أول مبيانيا النتائج :

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}$$

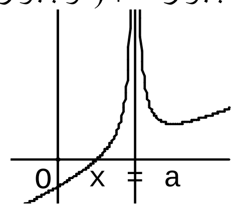
2. المقارب الموازي لمحور الأفاصيل

تعريف

إذا كانت: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$ (أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=a$) ,

نقول إن المستقيم ذا المعادلة $y=a$ مقارب للمنحنى (C_f)

بجوار $+\infty$ (أو بجوار $-\infty$)



مثال: نعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{6x+1}{2x-5}$

حدد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ وأول النتيجتين هندسيا

الجواب : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x}{2x}=\frac{6}{2}=3$

التأويل المبياني : المستقيم ذا المعادلة $y=3$ مقارب للمنحنى (C_f)

تمرين2 : أحسب النهاية التالية و أول مبيانيا النتيجة :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+2}$$

تمرين3: أحسب النهايات التالية و أول مبيانيا النتائج :

(1 $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x+3}{x-2}$ و $\lim\limits_{x\to 2^-}\frac{x+3}{x-2}$

2) $\lim\limits_{x\to 3^+}\frac{5}{2x-6}$ و $\lim\limits_{x\to 3^-}\frac{5}{2x-6}$

3) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x+5}{x+2}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x+5}{x+2}$

4) $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x-1}{6x+2}$ و $\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{3x-1}{6x+2}$

II. دراسة دالة حدودية من الدرجة الثانية

مثال :

لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=x^2+4x+3$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة f .

5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب.

7) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f و المستقيم (D) الذي معادلته $(D): y=3$ في معلم متعامد ممنظم $(o;\vec{i};\vec{j})$.

8) حدد نقط تقاطع (C_f) و (D).

9) حل مبيانيا في $\mathbb{R}$ المتراجحة $x^2+4x\geq 0$.

تمرين 4 : لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=-x^2+2x+3$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة f .

5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب.

7) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

تمرين 5 : لتكن f دالة معرفة ب:

$f(x)=-\frac{1}{2}x^2+2x+1$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة f .

5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب.

7) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

تمرين 6 : لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=2x^2-2x-3$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f

2) أحسب النهايات التالية : $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس اشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة f .

5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.

6) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب.

7) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

III. دراسة دالة متخاطة:

مثال : نعتبر الدالة العددية g المعرفة ب: $g(x)=\frac{2x+1}{x+1}$

1. حدد حيز تعريف الدالة g .
2. أحسب نهايات الدالة g في محدات حيز التعريف و أول النتائج هندسيا.
3. أحسب الدلة المشتقة. ثم ضع جدول تغيرات الدالة g .
4. أنشئ منحنى الدالة g .

الحل:

1)حيز تعريف الدالة g هو: $D=\{x\in\mathbb{R}/x+1\neq 0\}=\mathbb{R}-\{-1\}$

و منه $D=]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to -\infty}\frac{2x}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x+1}{x+1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{2x}{x}=2$

يعني المستقيم ذا المعادلة $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C_f).

$\lim\limits_{x\to -1^+} g(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}\frac{2x+1}{x+1}=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to -1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\frac{2x+1}{x+1}=+\infty$

يعني المستقيم ذا العادلة $x=-1$ مقارب عمودي للمنحنى.

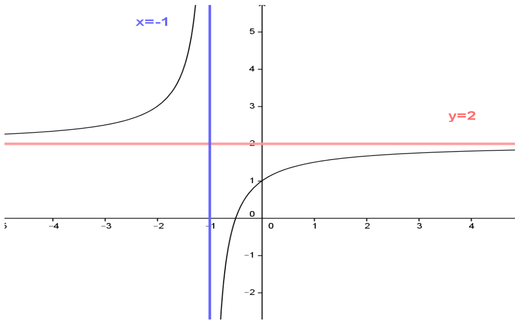
3)لكل x من D لدينا: $g'(x)=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$

يعني: $(\forall x\in D)\, g'(x)>0$

4)جدول تغيرات الدالة.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$2 \nearrow$	‖	$\nearrow 2$

منحنى الدالة g .



الأستاذ : عثماني نجيب

تمرين7 : لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\frac{2x+3}{x+2}$.

1) حدد مجموعة تعريف الدالة f
2) أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
و $\lim_{x\to-2^+} f(x)$ و $\lim_{x\to-2^-} f(x)$
3) أحسب مشتقة الدالة f وأدرس إشارتها
4) حدد جدول تغيرات الدالة f .
5) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.
6) حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب.
7) أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

تمرين8 : لتكن f دالة معرفة ب: $f(x)=\frac{2x+1}{x-1}$.

1. حدد مجموعة تعريف الدالة f
2. أحسب النهايات التالية : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$
و $\lim_{x\to1^+}\frac{2x+1}{x-1}$ و $\lim_{x\to1^-}\frac{2x+1}{x-1}$
3. أحسب مشتقة الدالة f وأدرس إشارتها
4. حدد جدول تغيرات الدالة f .
5. حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل.
6. حدد نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب.
7. أرسم (C_f) المنحنى الممثل للدالة f

IV. دراسة دالة حدودية من الدرجة الثالثة

مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$

1. حدد D_f حيز تعريف الدالة f
2. أدرس زوجية الدالة f
3. أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f
4. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
5. حدد جدول تغيرات الدالة f
6. حدد معادلة لمماس المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$
7. حدد نقط تقاطع المنحنى (C_f) الممثل للدالة مع محوري المعلم.
8. أرسم المنحنى (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

أجوبة : 1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$ $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) أ) اذا كانت $x\in\mathbb{R}$ فان $-x\in\mathbb{R}$

ب) $f(-x)=\frac{1}{3}(-x)^3-4(-x)=-\frac{1}{3}x^3-4(-x)=-\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)=-f(x)$

ومنه f دالة فردية

3) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند مالانهايةهي نهاية حدها الأكبر درجة

4) $f'(x)=\left(\frac{1}{3}x^3-4x\right)'=\frac{1}{3}3\times x^2-4=x^2-4$

$(x-2)(x+2)=0\Leftrightarrow x^2-2^2=0\Leftrightarrow x^2-4=0\Leftrightarrow f'(x)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ أو $x=-2$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		$+$	0	$-$	0	$+$	

5)

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$16/3$	$\searrow$	$-16/3$	$\nearrow$	$+\infty$

6)معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(-1)=\frac{11}{3}$ و $f'(-1)=-3$

$y=-3x+\frac{2}{3}\Leftrightarrow y=\frac{11}{3}-3(x+1)\Leftrightarrow y=f(-1)+f'(-1)(x+1)$

7) أ)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأفاصيل

نحل فقط المعادلة : $f(x)=0$ يعني $\frac{1}{3}x^3-4x=0$

يعني $x\left(\frac{1}{3}x^2-4\right)=0$ يعني $x=0$ أو $\frac{1}{3}x^2-4=0$

يعني $x=0$ أو $x^2=12$ يعني $x=0$ أو $x=\sqrt{12}$ أو $x=-\sqrt{12}$

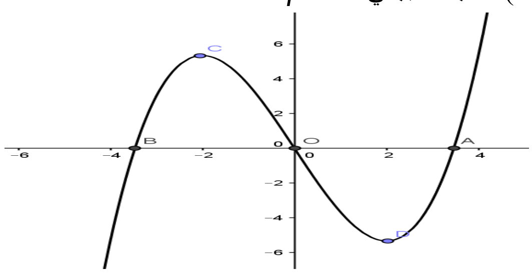
يعني $x=0$ أو $x=2\sqrt{3}$ أو $x=-2\sqrt{3}$

ومنه نقط التقاطع هم: $A(2\sqrt{3};0)$ و $B(-2\sqrt{3};0)$ و $O(0;0)$

ب)نقط تقاطع (C_f) المنحنى الممثل للدالة f مع محور الأراتيب

نحسب فقط : $f(0)$ لدينا $f(0)=0$ ومنه نقطة التقاطع هي: $O(0;0)$

8)التمثيل المبياني للدالة f



تمرين9 : نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي :

$f(x)=x^3-3x^2+4$

ليكن (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(o,\vec{i},\vec{j})$

1. أحسب نهايات الدالة f عند محدات مجموعة التعريف
2. أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها
3. ضع جدول تغيرات الدالة f .
4. حدد معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة $A(1;2)$

 الأستاذ : عثماني نجيب

5. أحسب $f(-1)$ و $f(2)$ و أنشئ (C_f) و (T).

الأجوبة : $f(x)=x^3-3x^2+4$

1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

2) $f'(x)=(x^3-3x^2+4)'=3\times x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3)

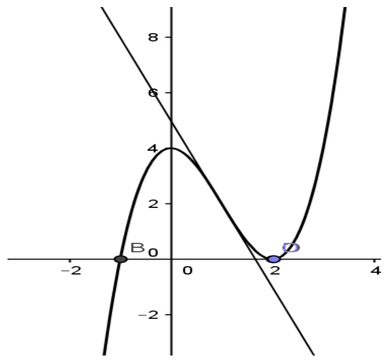
x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	4	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0=1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(1)=2$ و $f'(1)=-3$

$y=f(1)+f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=2-3(x-1) \Leftrightarrow y=-3x+5$

5) التمثيل المبياني للدالة f و $f(-1)=0$ و $f(2)=0$



تمرين10:

نعتبر الدالة f المعرفة كالتالي : $f(x)=x^3-3x^2+1$

1) حدد D_f حيز تعريف الدالة f

2) أحسب نهايات الدالة f عند محدات D_f

3) أحسب مشتقة الدالة f و أدرس إشارتها

4) حدد جدول تغيرات الدالة f

5) حدد معادلة لمماس المنحني (C_f) الممثل للدالة f في النقطة A التي أفصولها $x_0=-1$

6) أرسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

الأجوبة : $f(x)=x^3-3x^2+1$

1) $D_f=\mathbb{R}$ لأنها دالة حدودية

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x^3=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$

لأن نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ و $-\infty$ هي نهاية حدها الأكبر درجة

3) $f'(x)=(x^3-3x^2+4)'=3\times x^2-6x=3x(x-2)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 3x(x-2)=0 \Leftrightarrow 3x=0$ أو $x-2=0$

$\Leftrightarrow x=0$ أو $x=2$

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$3x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

4)

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

5) معادلة لمماس ل (C_f) في النقطة A التي أفصولها $x_0=1$

$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$ و $f(1)=-1$ و $f'(1)=-3$

$y=f(1)+f'(1)(x-1) \Leftrightarrow y=-1-3(x-1) \Leftrightarrow y=-3x+2$

6) التمثيل المبياني للدالة f